FASE COMARCAL

PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIONES

SOLUCIONES 6.º DE PRIMARIA

PROBLEMA 1

Apartado A

Cumplen la propiedad 1 los siguientes números:

a 153 = 1 + 125 + 27

b 370 = 27 + 343

c 371 = 27 +343 +1

d 407 = 64 + 343

Cumplen la propiedad 2 los números:

a 1729 (19 x 91=1729)

b 1458 (18 x 81= 1458)

Apartado B

Una respuesta válida podría ser:

Figura 1: «*Dibuja un cuadrado y otro cuadrado igual con los lados paralelos y uno de sus vértices en el centro del primer cuadrado*».

Figura 2: «*Dibuja dos circunferencias iguales, de manera que cada una de ellas pase por el centro de la otra*».

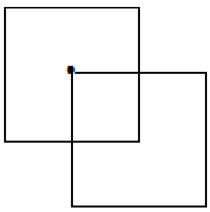


Fig. 1

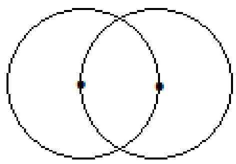


Fig.2

PROBLEMA 2

a)

Cantidad a pagar (€)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
N.º monedas de 1 €	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	5
N.º monedas de 2 €	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6

b) Podemos pagar con igual número de monedas de ambas clases para aquellas cantidades que sean múltiplos de 3.

c) Podemos pagar con igual número de monedas de ambas clases cantidades que sean múltiplos de 3, porque 3 euros se pueden pagar con una moneda de dos euros y una de un euro. Luego, si la cantidad que hay que pagar es divisible por 3, dividiendo por 3, el cociente nos diría el número de monedas de 1 € y, por tanto, el número de monedas de 2 €.

Ejemplos:

6 € se pagarían con 2 monedas de 1 € y 2 monedas de 2 €

27 € se pagarían con 9 monedas de 1 € y 9 de 2€

132 € se pagarían con 44 monedas de 1€ y 44 de 2€

PROBLEMA 3

a) Al ser las edades números de dos cifras, distintas de cero e inferiores a 25, las posibilidades serían:

- Que la cifra de las decenas sea 1

Edad de Puri	Edad de Antonio
11	11
12	21
13	31
14	41
…	

Si la cifra de las decenas fuese el 1, ninguna de las posibilidades sería válida, ya que Antonio tendría la misma edad que Puri o sería mayor que ella.

- Que la cifra de las decenas sea 2

Edad de Puri	Edad de Antonio
21	**12**
22	22
23	32
24	42

La única solución es que Puri haya cumplido 21 años y Antonio 12, ya que las demás posibilidades se descartan, porque suponen que Antonio tendría la misma edad o sería mayor que Puri.

b) Observamos la siguiente tabla:

Año	Edad de Puri	Edad de Antonio
2022	**21**	**12**
2023	22	13
2024	23	14
2025	24	15
2026	25	16
2027	26	17
2028	27	18
2029	28	19

2030	29	20
2031	30	21
2032	31	22
2033	**32**	**23**

Volvería a ocurrir el intercambio de las cifras en las edades de estas personas en el año 2033.

c) Para que se dé esta circunstancia tendrían que transcurrir 11 años.

Ejemplo: 21 - 12; 32 - 23; 43 – 34…

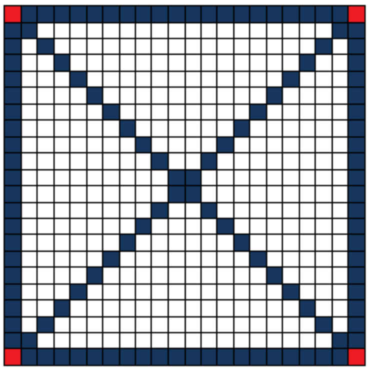
Edad de Puri	Edad de Antonio
32	**23**
43	34
54	45
…	…

PROBLEMA 4

a) Podemos proceder de esta manera:

Una vez colocadas las losas grises que rodean la habitación, nos queda un cuadrado para pavimentar con losas blancas. Calculamos el número de losas que caben en cada lado de la zona blanca. Sabemos que se han empleado 84 losas grises. Si le restamos las cuatro losas colocadas en las esquinas, el lado del cuadrado blanco se completa con 20 losas.

$$(84 - 4)/4 = 20 \text{ losas}$$



Calculamos el número de losas del cuadrado blanco $20^2 = 400$ losas.

Para calcular las losas colocadas en la diagonal, tenemos en cuenta que las losas blancas forman un cuadrado de lado la longitud de 20 losas; por tanto, hay 20 filas y 20 columnas, y se coloca una losa gris por fila y una por columna (o dos por fila /columna).

Si a la superficie total del suelo blanco le restamos las losas grises colocadas en diagonal, que son 40, obtenemos la cantidad de losas blancas que debemos comprar: 360 losas.

b) Calculamos la longitud del lado de la habitación. Como hay 22 losas en cada lado, sería:

$$22 \text{ x } 25 \text{ cm} = 550 \text{ cm} = 5{,}5 \text{ m}$$

Superficie de la habitación $5{,}52^{2} = 30{,}25 \text{ m}^{2}$

PROBLEMA 5

Analizamos los distintos lugares en los que pueden estar colocados los dados falsos.

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F

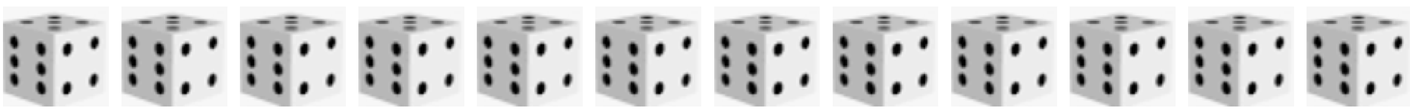
Podríamos elegir:

- El tercer dado y el octavo. Si el tercero es falso, el octavo será verdadero y viceversa.
- El cuarto dado y el noveno. Si el cuarto es falso, el noveno será verdadero y viceversa.
- El quinto dado y el décimo. Si el quinto es falso, el décimo será verdadero y viceversa.

Observamos que entre las posiciones 3.ª y 8.ª, 4.ª y 9.ª, y 5.ª y 10.ª, siempre vamos a encontrar un dado falso.

Elegido un par de dados adecuado, sabremos cuál es el falso cuando los coloquemos en los platillos de la balanza. El dado falso será el de menor peso.

Otro modo de resolver el problema:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Como hay cinco dados falsos seguidos, si estuvieran entre los nueve dados primeros, siempre sería falso el dado 5. Luego, si este dado es falso, sería verdadero el dado 10. Entonces, si el dado 10 es falso, el dado 5 es verdadero. Por tanto, elegidos estos dos y puestos en una balanza, el que pese menos será el falso. Hay otras posibles elecciones pero la justificación es la misma.

También se podría razonar así:

Como los cinco falsos están seguidos, elegimos el quinto y el octavo (el que está en quinta posición, si empezamos por el otro extremo) y sabemos que no pueden ser ambos verdaderos, ya que entonces los cinco falsos tienen que estar todos seguidos. Así, que si pesamos estos dos y ambos pesan lo mismo, son ambos falsos (ya tenemos un dado falso), y si no se equilibra la balanza, el que pese menos será falso.

SOLUCIONES SEGUNDO DE ESO

PROBLEMA 1

Apartado A

a. Cumplen la propiedad 1 los siguientes números:

- 153 = 1 + 125 + 27
- 370 = 27 + 343
- 371 = 27 +343 +1
- 407 = 64 + 343

b. Cumplen la propiedad 2 los números:

- 1729 (19 x 91=1729)
- 1458 (18 x 81= 1458)

c. No puede existir un número de cinco cifras que cumpla ***la propiedad 1***, porque el mayor ~~el~~ número de cinco cifras es 99999, y la suma de los cubos de sus cifras es 3645, que tiene 4 cifras. Así que, el resultado de la suma de los cubos de las cifras de un número menor que 99999 es menor que 3645, con lo que nunca sería un número de 5 cifras.

Tampoco hay números que cumplan ***la propiedad 2***, porque: si tomamos cualquier número de cinco cifras, será menor que 99999, por lo que la suma de sus cifras será menor que 45; además, el mayor número que se puede obtener al invertir las cifras de la suma de los dígitos de un número de cinco cifras es 93. Luego si tomamos cualquier número de cinco cifras, y multiplicamos el número que resulta de sumar sus cifras por el número que resulta de invertir las cifras de esta suma, el resultado sería menor que 45 x 93 = 4185, luego tendría menos de cinco cifras.

Apartado B

Una respuesta válida podría ser:

Figura 1: «*Dibuja dos cuadrados iguales, de tal forma que el segundo esté girado 45^o con respecto al anterior y tenga un vértice en el centro del primer cuadrado*».

Otra respuesta:

«Dibuja dos cuadrados iguales, de tal forma que el segundo tenga un vértice en el centro del primer cuadrado y que los dos lados que comparten ese vértice pasen por dos vértices del primer cuadrado».

Figura 2: *«Dibuja dos circunferencias iguales, de manera que cada una de ellas pase por el centro de la otra. Dibuja también el segmento que une los dos puntos donde se cortan las circunferencias».*

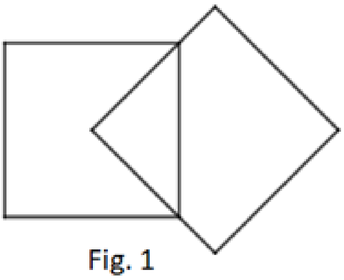


Fig. 1

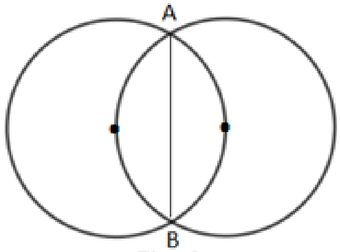


Fig. 2

PROBLEMA 2

a)

Cantidad a pagar (€)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
N.º monedas de 1 €	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**2**	**3**	**4**	**3**	**4**	**5**	**4**	**5**	**6**	**5**
N.º monedas de 2 €	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**6**

b) Podemos pagar con igual número de monedas de ambas clases cantidades que sean múltiplos de 3, porque 3 euros se pueden pagar con una moneda de dos euros y una de un euro. Luego, si la cantidad que hay que pagar es divisible por 3, dividiendo por 3, el cociente nos diría el número de monedas de 1 € y, por tanto, el número de monedas de 2 €.

Ejemplos:

27 €, se pagaría con 9 monedas de 1 € y 9 de 2 €

132 €, se pagaría con 44 monedas de 1 € y 44 de 2 €

c) Para que el número de monedas de 1 € sea superior al de 2 €, la cantidad que hay que pagar tiene que ser un múltiplo de 3 más 1 unidad. Ejemplos:

$$13 = 12 + 1 = \dot{3} + 1$$
$$100 = 99 + 1 = \dot{3} + 1$$

Para saber el número de monedas de 1 € que hemos de utilizar para pagar una cantidad determinada, múltiplo de 3 más 1, basta dividir dicha cantidad entre 3. El cociente nos indicará el número de monedas de 2 €. El número de monedas de 1 € será superior en una unidad al número de monedas de 2 €.

Ejemplos:

13 € se pagarían con 4 monedas de 2 € y 5 monedas de 1 €

100 € se pagarían con 33 monedas de 2 € y 34 monedas de 1 €

d) En el caso de que tengamos que pagar con mayor número de monedas de 2 € que de 1 €, las cantidades han de ser múltiplos de 3 más 2. Ejemplos:

$$11 = 9 + 2 = \dot{3} + 2$$
$$122 = 120 + 2 = \dot{3} + 2$$

En este caso, para saber el número de monedas de 2 € que hemos de utilizar para pagar una cantidad determinada, múltiplo de 3 más 2, basta dividir dicha cantidad entre 3. El cociente nos indicará el número de monedas de 1 €. El número de monedas de 2 € será superior en una unidad al número de monedas de 1 €.

Ejemplos:

11 € se pagarían con 4 monedas de 2 € y 3 monedas de 1 €

122 € se pagarían con 41 monedas de 2 € y 40 monedas de 1 €

e) Si hay que pagar n euros y dividimos n por 3, sabemos que n=3k+r, donde k es el cociente de la división y r el resto.

Si r=0, pagaremos con igual número (k) de monedas de un euros que de dos euros.

Cuando r=1, pagamos con una moneda más de un euro (k monedas de dos euros y k+1 monedas de un euro); y si r=2 damos una moneda más de dos euros (k monedas de un euro y k+1 monedas de dos euros).

PROBLEMA 3

a) Al ser las edades números de dos cifras, distintas de cero e inferiores a 25, analizamos estas posibilidades:

- Que la cifra de las decenas sea 1.

Edad de Puri	Edad de Antonio
11	11
12	21
13	31
14	41
…	...

Si la cifra de las decenas fuese 1, ninguna de las posibilidades sería válida, ya que Antonio tendría la misma edad o sería mayor que Puri.

- Que la cifra de las decenas sea 2.

Edad de Puri	Edad de Antonio
21	**12**
22	22
23	32
24	42

La única solución es que Puri haya cumplido 21 años y Antonio 12, ya que las demás posibilidades se descartan, porque suponen que Antonio tendría la misma edad o sería mayor que Puri.

b) Observemos la siguiente tabla:

Año	Edad de Puri	Edad de Antonio
2022	**21**	**12**
2023	22	13
2024	23	14

2025	24	15
2026	25	16
2027	26	17
2028	27	18
2029	28	19
2030	29	20
2031	30	21
2032	31	22
2033	**32**	**23**

Volvería a ocurrir el intercambio de las cifras en las edades de estas personas en el año 2033.

c) Continuamos añadiendo filas a la tabla anterior:

Edad de Puri	Edad de Antonio
32	**23**
43	34
54	45
…	…

Observando las tablas anteriores, la curiosidad de las edades de los primos que ocurre en el año 2022, vuelve a producirse cada 11 años.

Si Puri tiene 10a+b años y Antonio 10b+a, entonces dentro de once años para ambos la cifra de las decenas y la de las unidades ha aumentado en una unidad y la curiosidad se mantiene.
Por ejemplo, si la edad actual de dos personas es 52 y 25, dentro de 11 años sus edades tienen las mismas cifras pero invertidas, puesto que esas personas tendrían 63 y 36 años.

PROBLEMA 4

a) Analizamos los distintos lugares en los que pueden estar colocados los dados falsos:

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F

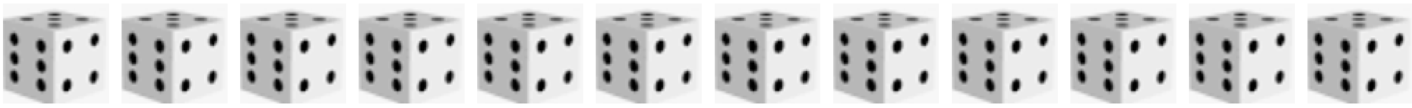
Observando la tabla, podríamos elegir:

- El tercer dado y el octavo. Si el tercero es falso, el octavo será verdadero y viceversa.
- El cuarto dado y el noveno. Si el cuarto es falso, el noveno será verdadero y viceversa.
- El quinto dado y el décimo. Si el quinto es falso, el décimo será verdadero y viceversa.

Comprobamos que entre las posiciones 3.ª y 8.ª, 4.ª y 9.ª, o 5.ª y 10.ª, **siempre** vamos a encontrar un dado falso.

Elegido un par de dados adecuado, sabremos cuál es el falso cuando los coloquemos en los platillos de la balanza. El dado falso será el de menor peso.

<u>Otro modo de resolver el problema</u>:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Como hay cinco dados falsos seguidos, si estuvieran entre los nueve dados primeros, siempre sería falso el dado 5. Luego, si este dado es falso, sería verdadero el dado 10. Entonces, si el dado 10 es falso, el dado 5 es verdadero. Por tanto, elegidos estos dos y puestos en una balanza, el que pese menos será el falso. Hay otras posibles elecciones pero la justificación es la misma.

También se podría razonar así:

Como los cinco falsos están seguidos, elegimos el quinto y el octavo (el que está en quinta posición, si empezamos por el otro extremo) y sabemos que no pueden ser ambos verdaderos, ya que entonces los cinco falsos tienen que estar todos seguidos. Así, que si pesamos estos dos y ambos pesan lo mismo, son ambos falsos (ya tenemos un dado falso), y si no se equilibra la balanza, el que pese menos será falso.

b) De manera similar a como hemos trabajado en el apartado anterior, construimos una tabla con 16 dados.

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º	13.º	14.º	15.º	16.º
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F

De izquierda a derecha, los dados tienen asignado un orden: 1.º, 2.º, 3.º, 4.º …

Empezando por la izquierda, si el quinto dado fuese falso, los cinco dados falsos se situarían desde el primero al noveno dado. En este caso, sabríamos que el décimo dado es verdadero.

Pondríamos el quinto dado en un platillo y el décimo en el otro; el de menor peso sería el quinto, por tanto este sería el falso. Si el quinto dado no fuese falso, el décimo podría ser falso o verdadero. Si es falso, entonces razonando igual que antes, el quinto dado es verdadero.

Si tanto el décimo dado como el quinto son verdaderos, entonces con certeza los dados situados en el 12.º, 13.º, 14.º y 15.º lugar son falsos. Al pesar los dados situados en el 10.º y 5.º lugar la balanza estaría en equilibrio, serían verdaderos y elegiríamos uno de los dados situado en el 13.º, 14.º o 15.º lugar, que sabemos que son falsos.

<u>Otro modo, razonando por simetría</u>:

El 5.º y el 12.º no pueden ser ambos falsos. Se ponen cada uno de ellos en uno de los platos de la balanza. Entonces:

- Si no pesan lo mismo, el que pese menos es falso.
- Si pesan lo mismo, han de ser ambos verdaderos. En ese caso, los falsos han de estar colocados entre el 6.º y el 11.º lugar. Y como van los cinco falsos seguidos, podemos asegurar que el 7.º, el 8.º y el 9.º son falsos.

PROBLEMA 5

Para ambas situaciones, la gráfica que representa el espacio recorrido en función del tiempo es la representación gráfica de una función, porque a cada momento temporal le corresponderá un único valor del espacio recorrido.

Por tanto, descartamos la gráfica 3, que nos dice que hay valores del tiempo que tienen muchos espacios asignados.

Las gráficas 2, 5 y 6 tampoco representan ninguna de las situaciones descritas.

En la gráfica 2, se representa periodos temporales donde avanzamos en el recorrido, intercalados con periodos donde retrocedemos, pero en realidad siempre avanzamos, a una velocidad mayor o menor (en la Situación 2) o estamos parados (en la situación 1).

La gráfica 5 representa periodos temporales en los que la persona no se mueve, pero no en los que se mueve, y además, tras un periodo de inmovilidad la persona ha avanzado de golpe un trecho, no se sabe cómo.

Y, por último, en la gráfica 6 hay representados tiempo y espacios negativos, lo que no tiene sentido.

Luego las gráficas que representan alguna de las situaciones son la 1 y la 4.

Asignamos a la situación 1 la gráfica 1 porque observamos que durante periodos temporales iguales, el espacio recorrido es el mismo (la ‘pendiente’ de la gráfica es la misma, luego la relación entre espacio y tiempo se mantiene igual), intercalando unos tramos en los que va más rápido y otros más lento.

La gráfica 4 representa la situación 2, con periodos temporales en los que descansa (el espacio recorrido se mantiene constante), y en cada uno de los tramos en los que aumenta el espacio recorrido la velocidad es constante (la ‘pendiente’ de la gráfica es la misma, luego la relación entre espacio y tiempo, es decir, la velocidad se mantiene igual).